

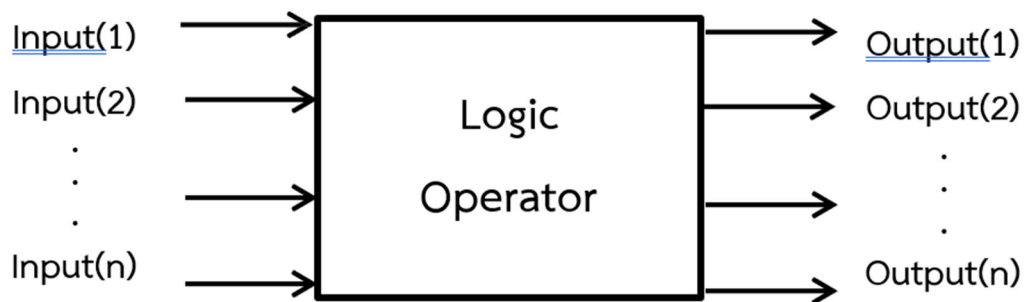
บทที่ 3

ทฤษฎีลอจิก และวงจรดิจิทัล

การทำงานของระบบดิจิทัล สามารถอธิบายได้โดยใช้สมการพีชคณิตลอจิก (Logic Equation) ซึ่งประกอบด้วย

ตัวแปรลอจิก (Logic Variable) เป็นตัวแปรที่รับค่าเพียงสองค่า หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า ตัวแปรสองสถานะ (Bi-State Variable) โดยมีข้อกำหนดคือ สามารถมีสถานะได้เพียงสองสถานะเท่านั้น และจะอยู่ในสถานะใดสถานะหนึ่งเท่านั้น จะอยู่พร้อมกันทั้งสองสถานะในเวลาเดียวกันไม่ได้ สถานะ ดังกล่าวอาจแทนความหมายต่าง ๆ เช่น เปิด-ปิด, สูง-ต่ำ, หนึ่ง-ศูนย์ เป็นต้น

ตัวกระทำทางลอจิก (Logic Operators) เป็นตัวรับเอาตัวแปรลอจิกมาดำเนินการเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ โดยผลลัพธ์ที่ได้ขึ้นอยู่กับชนิดของตัวกระทำและสถานะของตัวแปรลอจิกที่ถูกกระทำ เขียนแทน ด้วยไดอะแกรมได้ดังภาพ



ภาพ ตัวกระทำทางลอจิก

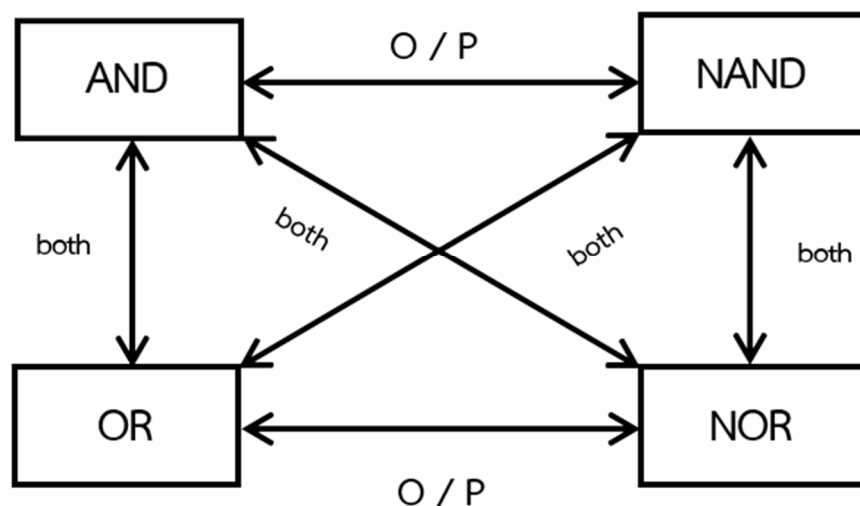
ตัวแปรอินพุต 1 ตัว สามารถทำให้เกิดสถานะที่แตกต่างกันได้ 2 กรณี เช่น ตัวแปร A มีสถานะที่ แตกต่างกันได้ 2 กรณี คือ $A=0$ หรือ $A=1$ เมื่อเพิ่มจำนวนตัวแปรอินพุตเป็น 2 ตัว เช่น A และ B สถานะที่แตกต่างกันจะเพิ่มเป็น 4 กรณี หรือ 22 กรณี คือ $A=0, B=0$ หรือ $A=0, B=1$ หรือ $A=1, B=0$ และ $A=1, B=1$ ดังนั้นถ้ามีตัวแปรอินพุต จำนวน n ตัว จะสถานะที่แตกต่างกันทั้งหมด 2^n กรณี ตัวกระทำทางลอจิกพื้นฐานได้แก่ AND, OR, NOT, NAND, NOR, XOR และ XNOR ตารางค่าความจริง (Truth Table) เป็นตารางแสดงความสัมพันธ์ค่าตรรกะระหว่างอินพุตและเอาต์พุตที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เกิดจากสมการลอจิก

ตารางค่าความจริง (Truth table) ประกอบด้วย ค่าสถานะของตัวแปรอินพุตที่เป็นไปได้ทั้งหมด ซึ่งมีค่าเท่ากับ 2^n กรณี เมื่อ n คือ จำนวนตัวแปรลอจิกด้านอินพุต และสถานะของตัวแปรด้านเอาต์พุตที่เกิดจากการกระทำทางลอจิกระหว่างตัวแปรด้านอินพุตค่าต่าง ๆ

ลอจิกเกต (Logic Gate) คือ อุปกรณ์อิเล็กทรอนิกส์ที่มีการทำงานเหมือนสวิตช์ (Switch) นั่นคือ มีสถานะเปลี่ยนแปลงไปมาได้เพียง 2 สถานะ โดยใช้ระดับแรงดันไฟฟ้าในการแทนสถานะของตัวแปรลอจิก โดยแรงดันไฟฟ้าสูง (High : H) และแรงดันไฟฟ้าต่ำ (Low : L) แทนระดับลอจิก 0 และ 1 ตามลำดับ

วงจรลอจิกเกต

วงจรเกตเป็นวงจรขนาดเล็กที่สุดของวงจรดิจิทัลและคอมพิวเตอร์ วงจรเกตพื้นฐานมีอยู่ 3 ชนิด คือ AND Gate, OR Gate และ NOT Gate เกตประเภท AND, OR และ NOT นั้นจะเป็นเกตพื้นฐานสำหรับการพัฒนาเกตตัวอื่นๆ และเกตต่าง ๆ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ NAND เกตได้ดังภาพที่ 3.2 จะเป็นการแสดงความสัมพันธ์การเปลี่ยนรูปร่าง ระหว่างเกตชนิดต่าง ๆ

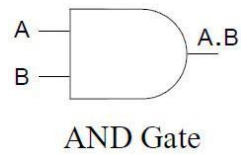


ภาพ การเปลี่ยนรูปแบบระหว่างเกตชนิดต่าง ๆ

จากภาพ O/P หมายความว่า เอาต์พุตจะได้รับการเปลี่ยนแปลง เช่น จะเปลี่ยน AND เกตไปเป็น NAND เกตก็ให้ใส่ NOT ที่เอาต์พุตของ AND เกต ทำนองเดียวกันหากจะเปลี่ยน NAND เกตมาเป็น AND เกต ก็ให้ใส่ NOT ที่เอาต์พุตของ NAND เกตเช่นกัน นอกจากนั้น I/P จะหมายถึงมีการเปลี่ยนแปลงที่อินพุต และอักษรกำกับลูกศรที่เขียนว่า “both” ก็คือการเปลี่ยนแปลงที่ให้ใส่ NOT ทั้งอินพุตและเอาต์พุตของลอจิกนั้น ๆ จากการประยุกต์ใช้วงจรเกตพื้นฐาน ทำให้สามารถสร้างเป็นเกตใหม่ขึ้นได้หลายชนิดและใช้ในงานที่ซับซ้อนได้ เช่น NAND Gate, NOR Gate, Exclusive OR Gate, Exclusive NOR Gate และ buffer Gate เป็นต้น

AND Gate แอนด์เกต

สัญลักษณ์



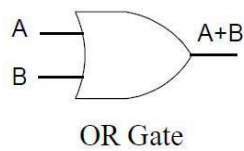
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = A \cdot B$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = A \cdot B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR Gate ออร์เกต

สัญลักษณ์



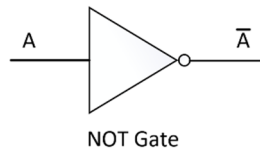
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = A + B$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = A + B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

NOT Gate อินเวอร์เตอร์ หรือเรียกว่า นอตเกต

สัญลักษณ์



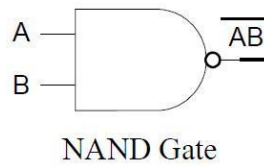
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A) = \bar{A}$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A		$f(A,B) = \bar{A}$
0		1
1		0

NAND Gate แนนด์เกต

สัญลักษณ์



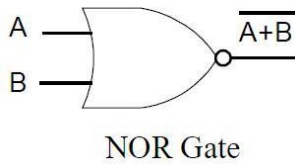
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = \overline{AB}$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = \overline{AB}$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

NOR Gate นอร์เกต

สัญลักษณ์



NOR Gate

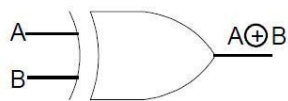
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = \overline{A+B}$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = \overline{A+B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Exclusive OR Gate เอกซ์คลูซีฟออร์เกต

สัญลักษณ์



Exclusive OR Gate

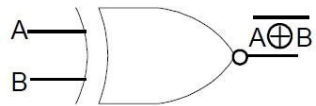
สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A,B) = A \oplus B$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A,B) = A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exclusive NOR Gate เอกซ์คลูซีฟนอร์เกต

สัญลักษณ์



Exclusive NOR Gate

สมการพีชคณิตลอจิก $Y = f(A, B) = \overline{A \oplus B}$

ตารางค่าความจริง

Input		Output
A	B	$f(A, B) = \overline{A \oplus B}$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

พีชคณิตบูลีน

พีชคณิตบูลีนเป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ในรูปแบบตรรกะที่สามารถทำให้ทราบถึง สถานะต่าง ๆ ในพีชคณิตบูลีนเราใช้ ตัวอักษร A,B,C,... แทนตัวแปรค่า 2 สภาวะ คือ 0 หรือ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแต่ละตัวเราใช้ เครื่องหมายทางเลขคณิตแทนความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรค่านั้น เครื่องหมายทางเลขคณิตดังกล่าวได้แก่

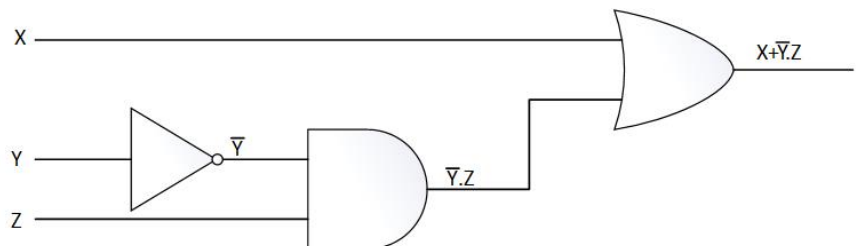
- เครื่องหมาย $\cdot$ (จุด) แทนความหมาย AND
- เครื่องหมาย $+$ (บวก) แทนความหมาย OR
- เครื่องหมาย $-$ (Bar) แทนความหมาย NOT

พีชคณิตแบบบูลีน ใช้แสดงค่าของเลขฐานสองและการคำนวณทางตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ตัวแปรที่ใช้ จะแทนด้วยตัวอักษรเช่น A, B, x และ y เป็นต้น ค่าทางตรรกศาสตร์ที่ใช้ในการคำนวณได้แก่ AND, OR และ

Complement

X	Y	Z	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Truth table



Logic Diagram

ภาพที่ 3.3 a) แสดง Truth Table และ b) Logic Diagram

จุดประสงค์ของพีชคณิตแบบบูลีน คือ ช่วยในเรื่องของการวิเคราะห์และออกแบบวงจรดิจิทัล โดยวิธีดังต่อไปนี้

- 1) แสดงในรูปแบบของตัวแปรเชิงพีชคณิตและตารางค่าความจริง (Truth Table) ระหว่างตัวแปรแต่ละตัว
- 2) แสดงในรูปแบบของตัวแปรเชิงพีชคณิต บ่งบอกความสัมพันธ์ระหว่างอินพุต-เอาต์พุต ของวงจรดิจิทัล (Digital Logic Circuit)
- 3) แสดงในรูปแบบของวงจรลดรูป (Simpler Circuit) สำหรับฟังก์ชันนั้น ๆ

ทฤษฎีพีชคณิตบูลีน

1) ทฤษฎี : Commutative Law (กฎการสลับที่)

$$- A + B = B + A$$

$$- A \cdot B = B \cdot A$$

2) ทฤษฎี : Associative Law (กฎการจัดหมู่)

$$- (A + B) + C = A + (B + C)$$

$$- (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

3) ทฤษฎี : Distributive Law (กฎการกระจาย)

$$- A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

$$- A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

4) ทฤษฎี : Identity Law (กฎของเอกลักษณ์)

$$- A + A = A$$

$$- A \cdot A = A$$

5) ทฤษฎี : Negation Law (กฎการลบข้าง)

$$- \overline{\overline{A}} = A$$

$$- \overline{\overline{\overline{A}}} = A$$

6) ทฤษฎี : Redundance Law (กฎการลดทอน)

$$- A + (A \cdot B) = A$$

$$- A \cdot (A + B) = A$$

$$- A \cdot B + A \cdot \overline{B} = A$$

$$- (A+B)(A+\overline{B}) = A$$

7) ทฤษฎี : Identity Law (กฎเอกลักษณ์)

คุณสมบัติของศูนย์

$$- 0 + A = A$$

$$- 0 \cdot A = 0$$

คุณสมบัติของหนึ่ง

$$- 1 \cdot A = A$$

$$- 1 + A = 1$$

8) ทฤษฎี : Complement Law (กฎการตรงข้าม)

$$- \bar{A} + A = 1$$

$$- A \cdot \bar{A} = 0$$

9) ทฤษฎี : Distributive Law (กฎการแจกแจง) และ Complement Law (กฎการตรงข้าม)

$$- A + (\bar{A} \cdot B) = A + B$$

$$- A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$$

10) ทฤษฎี : De Morgan's Theorem

$$- \overline{A + B} = \bar{A} \bar{B}$$

$$- \overline{AB} = \bar{A} + \bar{B}$$

11) ทฤษฎี : Absorption Law (กฎการดูดกลืน)

$$- A + A \cdot \bar{B} = A$$

และเนื่องจาก $\bar{B}$ เป็นแค่ค่าบูลีนตัวหนึ่ง ซึ่งตรงกันกับ ทฤษฎี Redundance Law (กฎการลดทอน) เป็นตัวเดียวกันจึงใช้ได้

12) ทฤษฎี : Distributive Law (กฎการแจกแจง) แบบย้อนกลับ

$$- A + A \cdot \bar{B} = A(1 + \bar{B})$$

$$\text{เนื่องจาก } 1 + \bar{B} = 1 \text{ (เพราะ } 1 \text{ OR อะไรก็ได้} = 1)$$

$$\text{ดังนั้น } A(1 + \bar{B}) = A \cdot 1$$

$$A \cdot 1 \text{ จึงเท่ากับ } A$$

การใช้ทฤษฎีพีชคณิตบูลีนในการลดรูปสวิตชิงฟังก์ชัน

การออกแบบวงจรลอจิก จาก Switching function ใดๆ ก็ตาม เราจำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องทำการลดรูป Switching function นั้น ๆ ให้เหลือตัวแปรน้อยที่สุดเสียก่อน ทั้งนี้เพื่อวัตถุประสงค์ในความประหยัด และ ข้อสำคัญอีกประการหนึ่งก็คือลดเวลาหน่วง (Delay Time) ให้น้อยที่สุด ดังนั้น Switching function ที่ยืดยาว เราก็ต้องทำให้สั้นลง โดยใช้ทฤษฎีของพีชคณิตบูลีน

ตัวอย่างที่ 1 จงลดรูป Switching Function : $A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$

$$\begin{aligned} A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} &= B(A + \bar{A}) + \bar{A} \cdot \bar{B} \\ &= B(1) + \bar{A} \cdot \bar{B} \\ &= B + \bar{A} \cdot \bar{B} \\ &= B + \bar{A} \\ A \cdot B + \bar{A} \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B} &= B + \bar{A} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงลดรูป Switching Function : $A + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

$$\begin{aligned} A + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B &= A(1 + \bar{B}) + \bar{A} \cdot B \\ &= A + \bar{A} \cdot B \\ &= A + B \\ A + A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B &= A + B \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงลดรูป Switching Function : $\overline{\bar{A} + A \cdot \bar{B} + B}$

$$\begin{aligned} \overline{\bar{A} + A \cdot \bar{B} + B} &= \overline{\bar{A} + \bar{B} + B} \\ &= \overline{\bar{A} + 1} \\ &= \bar{1} \\ &= 0 \\ \overline{\bar{A} + A \cdot \bar{B} + B} &= 0 \end{aligned}$$